Výsledky a návod k řešení 1. zápočtové písemky

Matěj Novotný

16.11.2012

Verze A

1) Na $\mathbb{R}$ vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+n!}.$$

2) Vyštřete obor diferencovatelnosti funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

kde

$$u_n(x) = \int_{-\infty}^{x} nte^{-nt^2}\ \mathrm{d}t,\ n \in \mathbb{N}.$$

3) Sečtěte řadu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2^n}$$

1) $|f_n| \longrightarrow 0$ například z D'Alembertova kritéria pro konvergenci řad. Z nutné podmínky pro konvergenci řad dostáváme $\lim_n f_n(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce $|f_n|$ jsou sudé a na $[0,\infty)$ rostoucí. Protože $\lim_{x\to\pm\infty} |f_n(x)| = \infty$, nekonvergují f_n stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$. Pro libovolný uzavřený interval z $\mathbb{R}$ se ale supremum $|f_n - 0|$ dá omezit funkční hodnotou v krajních bodech (díky monotonii). Proto $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} 0$ na $\mathbb{R}$.

2) Nejprve pomocí substituce $z = e^{-nt^2}$ zintegrujeme

$$\int_{-\infty}^{x} nte^{-nt^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}.$$

Geometrická řada $\sum_n e^{-n}$ je konvergentní, takže určitě existuje $x_0 = \pm 1$ takové, že $\sum_n u_n(x_0)$ konverguje. Dále u_n mají derivaci na celém $\mathbb{R}$, která je rovna

$$u_n'(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Vyšetřím-li supremum derivací na $\mathbb{R}$, zjistím, že se nabývá v bodě $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ a je rovno $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n}e^{-1/2}$. Supremum u_n na libovolném okolí nuly tedy nekonverguje k 0 (konverguje dokonce k nekonečnu), není tedy splněna nutná podmínka stejnoměrné konvergence řad. Pro pevný, uzavřený interval I z oboru $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ jsou ale od jistého n funkce u_n' na I monotónní a tak lze supremum odhadnout hodnotou v krajních bodech. Ověříme konvergenci řady suprem a konstatujeme, že byla splněna poslední podmínka pro to, aby jistě platilo, že funkce f je diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3) Definujeme funkci

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2^n} z^{n-1}.$$

Jedná se o mocninnou řadu s poloměrem 2 a středem 0. Uvnitř kruhu je $\int\int g(z) = z\sum_{n=1}^{\infty}(z/2)^n = \frac{z^2}{2-z}$. Dvakrát zderivujeme a dostáváme

$$g(z) = \frac{(4-2z)(2-z)^2 + 2(4z-z^2)(2-z)}{(2-z)^4}.$$

Tedy platí $g(1) = 8$, což je součet řady.

Verze B

1) Na $[0,1]$ vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^n},\ x \in [0,1].$$

2) Vyšetřete obor spojitosti funkce f a zjistěte, jestli má f derivaci v bodě $x=1$. Pokud ano, platí nerovnost $f'(1) \geq 3$?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{x^2-1}{n^{3/2}}\Big)$$

3) Sečtěte řadu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$$

1) Je určitě $f_n \to 0$ na $[0,1)$ a $f_n(1) \to \frac{1}{2}$. Z derivace je patrno, že funkce f_n je rostoucí na $[0,1]$. Supremum výrazu $|f_n - f|$ přes $[0,1]$ je rovno $1/2$, (I když se v žádném bodě nenabývá!!!) neboť $\lim_{x\to 1^-} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 1^-} |f_n(x) - 0| = 1/2$. Funkce f_n nekonvergují stejnoměrně k f na $[0,1]$. Díky monotonii lze opět supremum na uzavřeném podintervalu $[0,1)$ omezit hodnotou v krajním bodě. Je tedy $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$.

2) Zvolme uzavřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Protože je

$$|\sin\Big(\frac{x^2-1}{n^{3/2}}\Big)| \leq |\frac{x^2-1}{n^{3/2}}|,$$

a funkce v argumentu sinu je monotónní na $[0,\infty) \cap I$ i na $(-\infty, 0] \cap I$, omezíme supremum jednou z funkčních hodnot v krajních bodech intervalu I. Řada $\sum_n n^{-3/2}$ konverguje, tedy bude konvergovat i díky LSK řada suprem. f je tedy spojitá na $\mathbb{R}$.
Zderivujeme argument řady a vyšetříme supremum na okolí bodu $x=1$. Dostáváme

$$\sup_{x\in[0,2]} |\cos\Big(\frac{x^2-1}{n^{3/2}}\Big)\frac{2x}{n^{3/2}}| \leq 1 \cdot \frac{4}{n^{3/2}}.$$

Proto derivace na okolí jedničky konvergují stejnoměrně (Weierstraß; $\sum_n 4n^{-3/2}$ konverguje) a funkce f má v bodě $x=1$ derivaci, která je rovna

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(0)\frac{2}{n^{3/2}}.$$

Sečtením několika prvních členů zjistíme, že platí $f'(1) \geq 3$.

3) Definujeme funkci

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} z^{n-1}.$$

Poloměr konvergence je 5, střed 0. Uvnitř kruhu konvergence zintegrujeme $\int g(z) = z \sum_n \frac{nz^{n-1}}{5^n}$. Označme

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{5^n},$$

potom je kruh konvergence opět poloměru pět. Další integrace dává

$$\int f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{5^n} = \frac{z}{5-z},$$

tedy $f(z) = \frac{5}{(5-z)^2}$ a dále

$$g(z) = \Big(\frac{5z}{(5-z)^2}\Big)' = 5 \cdot \frac{5+z}{(5-z)^3}.$$

Tedy $g(1) = 15/32$, což je součet řady.